

ИНТЕГРАЦИИ СИГНАЛОВ КОГЕРЕНТНОЙ СИСТЕМЫ ГЛОНАСС/GPS

А. В. Полтавский

Основные положения и теории марковского случайного процесса позволяют оценить совокупность наблюдаемых сигналов с приемников навигационных спутниковой системы ГЛОНАСС/GPS в дифференциальном режиме работы в задачах определения координат местоположения подвижного объекта управления (ОУ) $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$, которые будем рассматривать как компоненты n -мерного векторного процесса $Y(t)$. Случайный векторный процесс сигналов с приемников навигационных спутников ГЛОНАСС/GPS $Y(t)$ должен быть таким, чтобы при непрерывном изменении аргумента t за любой малый промежуток времени Δt его компоненты $Y_i(t)$ изменялись на величину порядка $\sqrt{\Delta t}$ и все траектории каждой компоненты были непрерывны с вероятностью единица в обычном смысле понятия непрерывности функций. Считаем, что большие изменения компонент рассматриваемого случайного процесса маловероятны, конечные скачки имеют нулевую вероятность, а также в последовательные моменты времени $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, взятые в интервале существования рассматриваемого случайного процесса, будут известны значения его компоненты в виде

$$Y_1(t_1), \dots, Y_n(t_1); \dots; Y_1(t_m), \dots, Y_n(t_m).$$

Рассмотрим совокупность значений многомерного случайного процесса в моменты времени t_{h-1}, t_h при $t_{h-1} < t_h$: $Y_1(t_{h-1}), \dots, Y_n(t_{h-1}); Y_1(t_h), \dots, Y_n(t_h)$. Из теории вероятностей известно [2], что многомерный случайный процесс является марковским, если закон распределения системы случайных величин $Y_1(t_h), \dots, Y_n(t_h)$, вычисленный при условии, что известны значения их $t = t_{h-1}$ $Y_1(t_{h-1}), \dots, Y_n(t_{h-1})$, не зависит от того, какие значения случайные функции $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$ принимали в моменты времени, предшествовавшие моменту времени t_{h-1} . Сформулированное положение выражается формулой, которая принимает вид записи для скалярного аргумента как

$$\begin{aligned} f(y_1(t_h), \dots, y_n(t_h) | y_1(t_1), \dots, y_n(t_1); \dots; y_1(t_{h-1}), \dots, y_n(t_{h-1})) &\equiv \\ &\equiv f(y_1(t_h), \dots, y_n(t_h) | y_1(t_{h-1}), \dots, y_n(t_{h-1})). \end{aligned} \quad (1)$$

Данную формулу можно записать для векторного аргумента в следующей форме:

$$f(y(t_h) | y(t_1), \dots, y(t_{h-1})) = f(y(t_h) | y(t_{h-1})).$$

Из теории вероятностей также следует, что исчерпывающей характеристикой для *многомерного* (векторного) *случайного марковского процесса*, подобно тому, как это имеет место для одномерного процесса, является вторая функция плотности вероятности

$$f_2(y(t_1), y(t_2)) = f_2(y_1(t_1), \dots, y_n(t_1); y_1(t_2), \dots, y_n(t_2)) \quad (2)$$

или первая функция плотности вероятности $f_1(y(t_1))$ и функция вероятности перехода $f(y(t_2) | y(t_1))$ определяются равенствами как

$$\begin{aligned} f_1(y(t_1)) &= f_1(y_1(t_1), \dots, y_n(t_1)), \\ f(y(t_2) | y(t_1)) &= f(y_1(t_2), \dots, y_n(t_2) | y_1(t_1), \dots, y_n(t_1)). \end{aligned} \quad (3)$$

Функции $f_1(y(t_1))$ и $f(y(t_2)|y(t_1))$ выражаются через $f_2(y(t_1), y(t_2))$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_1(y(t_1)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y(t_1), y^*(t_2)) dy^*, \\ f(y(t_2)|y(t_1)) &= \frac{f_2(y(t_2), y(t_1))}{f_1(y(t_1))}. \end{aligned} \quad (4)$$

Условная функция плотности вероятности $f(y(t_2)|y(t_1))$ в многомерном процессе неотрицательна и нормирована к единице, как и для одномерного, и обращается в дельта-функцию при совпадении моментов во времени $t_1 = t_2 = t$:

$$f(y^*(t)|y(t)) = \delta(y^* - y) = \delta(y_1^* - y_1) \dots \delta(y_n^* - y_n). \quad (5)$$

Плотность вероятности перехода $f(y(t_2)|y(t_1))$ для многомерного марковского случайного процесса также удовлетворяет и интегральному уравнению Смолуховского–Колмогорова–Чепмена при наблюдении в диапазоне времени $t_1 < t' < t_2$:

$$f(y(t_2)|y(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y(t_2)|y'(t')) f(y'(t')|y(t_1)) dy'. \quad (6)$$

Уравнение (6) получается путем простого обобщения на многомерный векторный процесс уравнения Маркова или на основании соотношения

$$f_h(y(t_1), \dots, y(t_h)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{h+1}(y(t_1), \dots, y(t_h), y'(t')) dy'.$$

Применив эту формулу для $h = 2$, полагая, что $t_1 < t' < t_2$:

$$f_2(y(t_1), y(t_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_3(y(t_1), y'(t'), y(t_2)) dy' \quad (7)$$

и подставляя в эту формулу выражения для плотностей вероятности марковского процесса

$$\begin{aligned} f_2(y(t_1), y(t_2)) &= f_1(y(t_1)) f(y(t_2)|y(t_1)), \\ f_3(y(t_1), y'(t'), y(t_2)) &= f_1(y(t_1)) f(y(t_2)|y'(t')) \times f(y'(t')|y(t_1)), \end{aligned} \quad (8)$$

получим выражение в виде

$$f_1(y(t_1)) f(y(t_2)|y(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y(t_1)) f(y(t_2)|y'(t')) f(y'(t')|y(t_1)) dy'. \quad (9)$$

Для многомерного марковского непрерывного процесса вводятся соответствующие две характеристические функции. Функции при n -мерном случайном марковском процессе $Y(t)$ для векторного аргумента $\lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ записываются в виде

$$\begin{aligned} g_1(\lambda, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T y} f_1(y, t) dy, \\ g(\lambda, t | y', t') &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T y} f(y, t | y', t') dy, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\lambda^T y$ – скалярное произведение векторов λ и y . Так как многомерные плотности вероятности являются также интегрируемыми в бесконечных пределах неотрицательными функциями, то существует и преобразование Фурье, определяющее эти функции через соответствующие характеристические функции:

$$f_1(y, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda^T y} g_1(\lambda, t) d\lambda, \quad (11)$$

$$f(y, t \mid y', t') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda^T y} g(\lambda, t \mid y', t') d\lambda.$$

Характеристические же функции векторных случайных функций обладают свойствами, как и для одномерных случайных процессов.

Далее, если в n -мерном векторном аргументе часть компонент полагать равными нулю, то получим характеристическую функцию случайного векторного процесса уменьшенного порядка как

$$g_1(\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0, \lambda_n, t) = g_1(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_n, t).$$

В векторной форме марковские процессы имеют вид

$$\begin{aligned} g_1(\lambda, t) &= 1 + \sum_{k=1}^n i\lambda_k M[Y_k(t)] + \frac{1}{2!} \sum_{k,\ell=1}^n i^2 \lambda_k \lambda_\ell M[Y_k(t)Y_\ell(t)] + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{k,\ell,r=1}^n i^3 \lambda_k \lambda_\ell \lambda_r M[Y_k(t)Y_\ell(t)Y_r(t)] + \dots, \\ g(\lambda, t \mid y', t') &= 1 + \sum_{k=1}^n i\lambda_k M[Y_k(t) \mid y'] + \frac{1}{2!} \sum_{k,\ell=1}^n i^2 \lambda_k \lambda_\ell M[Y_k(t)Y_\ell(t) \mid y'] + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{k,\ell,r=1}^n i^3 \lambda_k \lambda_\ell \lambda_r M[Y_k(t)Y_\ell(t)Y_r(t) \mid y'] + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

где $M[Y_k(t)Y_\ell(t) \dots]$ – начальные моменты, а $M[Y_k(t)Y_\ell(t) \dots \mid y']$ – условные начальные моменты случайного векторного процесса $Y(t)$.

Многомерный непрерывный марковский процесс так же, как и одномерный, может быть полностью описан *локальными* характеристиками. Этими локальными характеристиками являются условные математические ожидания, а также условные корреляционные моменты приращений компонент $Y_k(t)$ марковского случайного процесса при изменении аргумента на малый диапазон времени Δt :

$$\begin{aligned} \Delta m_k(y, t) &= M[Y_k(t + \Delta t) - Y_k(t) \mid y, t] = A_k(y, t)\Delta t + 0(\Delta t), \\ \Delta m_{kl}(y, t) &= M[(Y_k(t + \Delta t) - Y_k(t))(Y_l(t + \Delta t) - Y_l(t)) \mid y, t] = B_{kl}(y, t)\Delta t + 0(\Delta t) \quad (k, l = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (13)$$

где $A_k(y, t)$ – компоненты вектора $A(y, t)$ и $B_{kl}(y, t)$ – компоненты матрицы $B(y, t)$, являются непрерывными функциями, рассматриваемые вместе со своими производными. Условные моменты $\Delta m_{klr}, \Delta m_{klrs}, \dots$ выше второго имеют порядок малости $0(\Delta t)$ более Δt в соответствии с определением для непрерывного марковского случайного процесса.

С помощью введенных локальных характеристик для многомерного марковского процесса запишем условную характеристическую функцию приращений $\Delta Y(t)$ процесса $Y(t)$ за время наблюдения Δt :

$$g_{\Delta y}(\lambda, t + \Delta t \mid y, t) = 1 + \sum_{k=1}^n i\lambda_k \Delta m_k(y, t) + \frac{1}{2!} \sum_{k,\ell=1}^n i^2 \lambda_k \lambda_\ell \Delta m_{kl}(y, t) + \frac{1}{3!} \sum_{k,\ell,r=1}^n i^3 \lambda_k \lambda_\ell \lambda_r \Delta m_{klr}(y, t) + \dots, \quad (14)$$

где $\Delta m_k(y, t) = M[\Delta Y_k(t) \mid y]$ – условные моменты первого порядка приращений $\Delta Y_k(t)$ координат; $\Delta m_{kl}, \Delta m_{klr}$ и т.д. – условные моменты высших порядков приращений координат.

Изложенный системный подход в математическом моделировании многомерного марковского (нормально распределенного) может рассматриваться как характеризующий процесс блуж-

дания векторов положения координат и скорости центра масс подвижного объекта, например беспилотного летательного аппарата (БЛА) в результате обработки сигналов с n -приемников от спутниковой системы ГЛОНАСС/GPS, расположенных по периметру летательного аппарата. Для анализа этого процесса уравнивания следует рассматривать как векторные. Компоненты данного векторного винеровского процесса независимы. Поэтому для каждой компоненты здесь можно повторить выкладки для соответствующего диффузионного процесса. В результате предлагаемого подхода в имитационном моделировании, например, первая плотность вероятности двумерного векторного процесса принимает вид

$$f_1(y_1, y_2, t) = \frac{1}{2\pi Gt} e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2Gt}}. \quad (15)$$

Для решения прикладных задач имитационного моделирования в лабораторных условиях было изготовлено шесть приемников от спутниковой навигации ГЛОНАСС/GPS в модели бортового комплекса (БКУ) многофункционального БЛА двойного назначения (рис. 1).

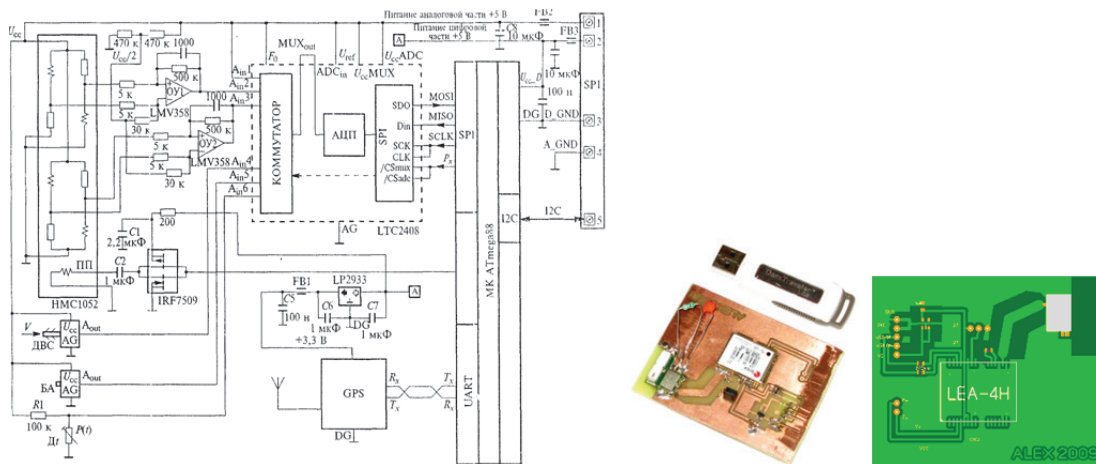


Рис. 1. Внешний вид и топология схемы спутникового канала ГЛОНАСС/GPS в многоканальной структуре имитационных моделей БКУ БЛА экспериментальных исследований. Техническое решение впервые выполнено в НИР «КОМПЛЕКС-1» ИПУ РАН 14.06.2009 г.

На рис. 2 показан фрагмент имитационного моделирования в целях получения средней квадратической ошибки (СКО) η определения координат местоположения центра масс БЛА. Из графика видим, что устойчивость случайного процесса уже наблюдается при установке 6–8 приемников ГЛОНСС/GPS по периметру на подвижном объекте.

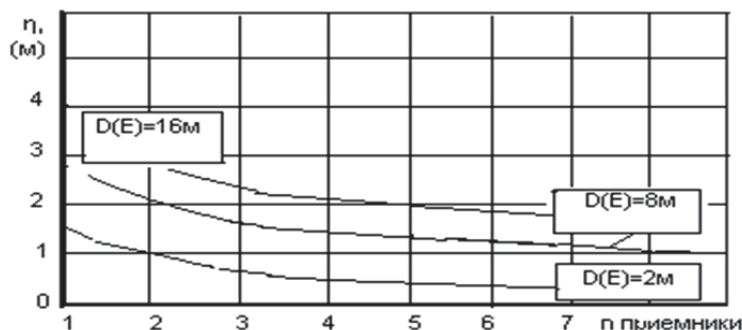


Рис. 2. Изменения СКО от числа приемников спутникового канала ГЛОНАСС/GPS

Список литературы

1. Казаков, И. Е. Методы оптимизации стохастических систем / И. Е. Казаков, Д. И. Гладков. – М. : Наука, 1987. – 246 с.

2. Теоретические основы проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов / В. В. Кульба, Е. Н. Микрин, Б. В. Павлов, В. Н. Платонов ; Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. – М. : Наука, 2006. – 579 с.
3. Казаков, И. Е. Анализ стохастических систем в пространстве состояний / И. Е. Казаков, С. В. Мальчиков. – М. : Наука, 1983. – 516 с.
4. Красильщиков, М. Н. Бортовые информационно-управляющие средства оснащения ЛА / М. Н. Красильщиков, Р. В. Мубарашкин, Н. В. Ким. – М. : МАИ, 2003. – 496 с.
5. Полтавский, А. В. Управление безопасностью движения беспилотного ЛА / А. В. Полтавский // Датчики и системы. – 2008. – № 9. – С. 4–8.
6. Полтавский, А. В. Модель измерительной системы в управлении БЛА / А. В. Полтавский // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2009. – № 10. – С. 73–77.
7. Лысенко, А. В. Способ снижения величины вибрационных нагрузок в несущих конструкциях ЭС и методика его реализующая / А. В. Лысенко // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 4. – С. 41–44.
8. Затылкин, А. В. Алгоритм проведения проектных исследований радиотехнических устройств опытно-теоретическим методом / А. В. Затылкин, И. И. Кочегаров, Н. К. Юрков // Надежность и качество : тр. Междунар. симп. : в 2 т. / под ред. Н. К. Юркова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2012. – Т. 1. – С. 365–367.
9. Гришко, А. К. Оценка качества математических моделей расчета электроакустических полей и моделей расчета дальности действия радиолокационных систем методом последовательного анализа / А. К. Гришко // Надежность и качество : тр. Междунар. симп. : в 2 т. / под ред. Н. К. Юркова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2012. – Т. 1. – С. 244–245.

УДК 629.7.017

Полтавский, А. В.

Интеграции сигналов когерентной системы Глонасс/GPS / А. В. Полтавский // Надежность и качество сложных систем. – 2014. – № 2(6). – С. 46–50.

Полтавский Александр Васильевич

доктор технических наук,
старший научный сотрудник,
Институт проблем управления
Российской академии наук им. В. А. Трапезникова
(117997, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65)
334-84-79
E-mail: avp57avp@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается один из подходов в прикладных задачах математического моделирования многоканальных систем управления подвижными объектами в случае использования информации от приемников спутниковой навигационной системы ГЛОНАСС/GPS.

Ключевые слова: навигационная спутниковая система, марковский процесс, беспилотные летательные аппараты.

Poltavskiy Aleksandr Vasil'evich

doctor of technical sciences, senior stuff scientist,
Institute of management problems
of Russian academy of sciences
named after V. A. Trapeznikov
(117997, 65 Profsoyuznaya street, Moscow, Russia)

Abstract. Under consideration is one of the approaches in the tasks of the mathematical modeling of multichannel control systems of moving objects in case of using signals from receivers for satellite navigational systems GLONASS/GPS.

Key words: satellite navigational system, Markov process, unmanned aircraft vehicles.